THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 9

Exercice 1.
L'ensemble de Cantor $C_\infty \subset [0,1]$ est défini comme suit. Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$.

(a) Calculer $\lambda(C_n)$ et déduire que $\lambda(C_\infty) = 0$.

(b) Soit F_n la fonction de répartition de $\big(\frac{3}{2}\big)^n \lambda(.\cap C_n)$ où $\lambda(.\cap C_n)$ est la mesure de Lebesgue restreinte à C_n (c.-à-d. la mesure donnée par $A \mapsto \lambda(A \cap C_n)$). Dessiner sur un même graph, $F_0, F_1, \dots$.

(c) Montrer que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge quand $n \to \infty$ vers une fonction croissante F (est-ce que la convergence est simple/en norme infinie $\|.\|_\infty$?)

(d) Montrer que F est croissante et continue.

(e) Soit μ la mesure de fonction de répartition F. Montrer que $\mu(C_\infty) = [0,1] = 1$ mais que μ n'as pas d'atomes (c.-à-d. que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$) .

(f) Est-ce qu'il existe une fonction f mesurable positive telle que $\mu = f d\lambda$?

La mesure μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue 0, mais n'a pas d'atomes. Cet exemple nous montre qu'une mesure sur $\mathbb{R}$ ne se décompose pas uniquement dans une partie à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et une partie atomique. On va y revenir plus tard.

Exercice 2.
Posons, pour $d \geq 1$ et $r \geq 0$, $\mathbb{B}_d(r) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq r\}$. Let but est de calculer $\lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$ où λ_d est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

(i) Argumenter que $\lambda_d(\mathbb{B}_d(r)) = r^d \lambda_d(\mathbb{B}_d(1))$. Posons $v_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d(1))$.

(ii) En utilisant le théorème de Fubini, argumenter que

$$v_d = v_{d-1} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx.$$

(iii) Posons $I_{d-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx$. En intégrant par parties, prouver que

$$I_{d-1} = (d-1)(I_{d-3} - I_{d-1}) \qquad \forall d \geq 3.$$

Trouver une equation de récurrence pour $I_{d-1}I_{d-2}$.

(iv) Calculer I_0 et I_1. Déduire la valeur de I_2.

(v) En utilisant les deux points précédents, montrer que $I_{d-1}I_{d-2} = \frac{2\pi}{d}$ pour tous $d \geq 2$.

(vi) En utilisant le point (a), montrer que $v_d = v_{d-2} I_{d-1} I_{d-2}$ et trouver une formule pour v_d en fonction de v_0 ou v_1, suivant la parité de d.

(vii) Calculer v_0 et v_1 directement. Déduire la valeur de v_d pour tous d.

Mesure et dimension de Hausdorff

Exercice 3.
Montrer que la mesure $\mathcal{H}^0$ sur un espace métrique E (ou sur $\mathbb{R}^d$ si vous préférez) est la mesure de comptage.

Exercice 4.
Que vaut $\mathcal{H}^1$ dans $\mathbb{R}^1$?
Pour un borélien $A \subset \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, que vaut $\mathcal{H}^1(A)$?

Exercice 5 (☠).
Le but de cet exercice est de montrer que la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ est égale à la mesure de Lebesgue λ_d.

(a) Donner un argument complet pour le fait que $\mathcal{H}^d = \beta \lambda_d$ pour une constant $0 < \beta < \infty$.

Le reste de l'exercice vise à montrer que $\beta = 1$. Acceptons le fait (loin d'être trivial) que l'ensemble de diamètre 2 de mesure de Lebesgue maximale est la boule unité $B(0,1)$.

(b) Déduire de l'hypothèse acceptée que pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha(d) 2^{-d} \mathrm{diam}(B)^d \geq \lambda_d(B)$. Conclure que $\mathcal{H}^d \geq \lambda_d$, donc que $\beta \geq 1$.

(c) Supposons par l'absurde que $\beta = 1 + 2\delta > 1$. Pour contredire cela, on va montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de $[0,1]^d$ par des ensembles $B_1, B_2, \ldots$ avec

$$\mathrm{diam}(B_n) < \epsilon \text{ pour tout } n \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha(d) 2^{-d} \sum_{n \geq 1} \mathrm{diam}(B_k)^d < 1 + \delta.$$

Trouver un tel recouvrement ou les B_n sont des boules fermées de différents rayons, avec tous les rayons plus petits que $\epsilon/2$.
Indication: placer pour commencer des boules disjointes de rayon $1/m$ pour un certain $m > 2/\epsilon$, ensuite completer ce qui reste avec des boules plus petites.

(d) Conclure.

Exercice 6.
Le but de cet exercice est de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor $C_\infty = \bigcap_{n \geq 0} C_n$.
Rappel: L'ensemble de Cantor est défini comme suit. Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3} C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_n C_n$.

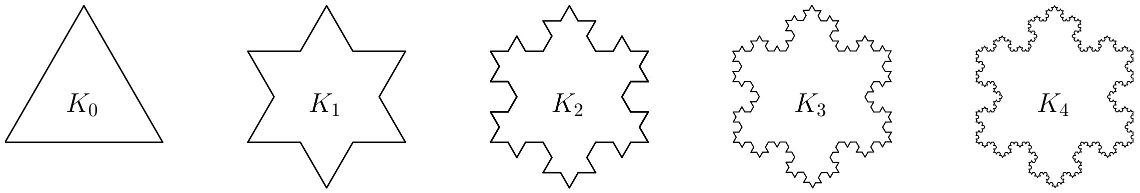
(a) En utilisant le auto-similarité de C_∞, donner un argument heuristique pour montrer que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

(b) Par un recouvrement explicite, montrer que $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C_\infty) \leq 1$.

(c) Soit F la fonction de répartition associée à C_∞. Monter que $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$ pour tout $x, y \in [0, 1]$.
Indication: montrer l'inégalité pour F_n (la fonction de répartition associée à C_n) par récurrence sur n, ensuite passer à la limite.

(d) En déduire que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$. Conclure.

Exercice 7 ( ).
Montrer que le contour du flocon de Koch $K_\infty = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ est bien une courbe continue et qu'elle n'est pas rectifiable. Calculer sa dimension de Hausdorff.



Cinq étapes dans la construction du Flocon de Koch.

Espaces métriques

Exercice 8.
Le but de cet exercice est de s'habituer avec les différentes propriétés des espaces métriques. Ce qu'il faut retenir est qu'un espace métrique localement compact et séparable (on appel un tel espace un espace *polonais*) est également complet et σ-compact. De plus, c'est essentiellement un espace propre (quitte à modifier la distance sans modifier la topologie).

(a) Montrer qu'un espace métrique propre est localement compact, σ-compact, complet et séparable.

(b) Donner un exemple d'espace métrique qui est polonais (complet et separable) mais pas localement ou σ-compact.

(c) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement compact mais pas σ-compact.

(d) Montrer qu'un espace métrique localement compact est σ-compact si et seulement s'il est séparable.

(e) Soit (E, d) un espace métrique localement compact qui est σ-compact. Montrer qu'il existe un distance d' sur E qui génère la même topologie que d et telle que (E, d') est propre.

(f) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement est σ-compact mais pas propre (*Indication:* modifier la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ pour que $B(0, 1) = \mathbb{R}$ mais sans modifier la topologie).

Exercice 9 (Important !). (a) Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un ensemble dense dans E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue (c.-à-d. telle que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$ avec $d(x, y) < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).
Montrer qu'il existe une unique fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer de plus que F est uniformément continue.

(b) Même question si f est à valeurs dans un espace métrique complet.

(c) Donner un contre-exemple si on suppose $f : A \to \mathbb{R}$ seulement continue, pas uniformément continue.

Exercice 10 (Théorème de point fixe de Banach)**.**
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante, c.-à-d. telle qu'il existe $c \in [0, 1)$ avec $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f admet un unique point fixe (un point fixe est un $x \in E$ tel que $f(x) = x$).
Indication: pour l'existence, prendre un point $x_0 \in E$ et étudier la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers un point de E. Quelle est sa vitesse de convergence ?

Exercice 11.
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que si E est compact, alors il est complet et borné (c.-à-d. il existe $M > 0$ tel que $d(x, y) < M$ pour tout $x, y \in E$).
Indication: Pour montrer que E est borné, utiliser la contraposée: si on suppose que E n'est pas borné, construire une suite qui ne contient pas de sous-suite convergente.
Déduire que si $A \subset E$ est compact, alors A est fermé et borné. Est-ce que l'inverse est vrai ?

Exercice 12.
Soit (E, d) un espace métrique et $K \subset E$ un compact.

(a) Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(K)$ est borné et f atteint sont supremum et son infimum, c.-à-d. qu'il existe $x, y \in K$ t.q. $f(x) = \sup_{z\in K} f(z)$ et $f(y) = \inf_{z\in K} f(z)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in K$ t.q. $d(x, y) = \inf_{z\in K} d(x, z) =: \mathrm{dist}(x, K)$.

(c) Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue.

Espace vectoriels normés

Exercice 13 (Important !)**.**
Soient E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E avec $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$. Montrer alors que $\sum_{n=1}^{N} x_n$ converge quand $N \to \infty$ vers un élément de E qu'on va noter $\sum_{n\geq 1} x_n$.
Ainsi, dans un espace de Banach, les séries absolument convergentes convergent!
Monter que pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n\geq 1} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n>N} x_n$$

et que $\| \sum_{n>N} x_n\| \leq \sum_{n>N} \|x_n\|$.

Exercice 14.
Soit E un espace vectoriel. On dit que deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur E sont équivalentes s'il existe des constantes $0 < c < C$ telles que $c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|, \qquad \forall x \in E$.

(a) Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles génèrent la même topologie sur E (c.-à-d. les deux normes génèrent le même ensemble d'ouverts).

(b) Montrer que si deux normes sont équivalentes, alors une suite de Cauchy dans une norme est aussi de Cauchy pour l'autre. Déduire que l'espace est complet dans une norme si et seulement s'il est complet dans une autre.

(c) Montrer que si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

(d) On écrit $\ell_b(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles bornées. Donner deux normes sur $\ell_b(\mathbb{R})$ qui ne soit pas équivalentes.

Exercice 15.
Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie E est complet.
Indication: Fixer une base de E et utiliser une norme explicite (p.ex. la norme $\|.\|_\infty$). La preuve se base sur la complétude de $\mathbb{R}$; procéder coordonnée par coordonnée.

Exercice 16 (☠).
Soit $\mathcal{B}(0,1)$ la boule unité d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathcal{B}(0,1)$ est précompacte (c.-à-d. que son adhérence est compacte) si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 17.
On écrit $\ell_0(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls et $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

(a) Montrer que $\ell_0(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ est une norme sur $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\ell_0(\mathbb{R})$ est dense dans $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

(d) Montrer que $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$ est complet pour $\|.\|_\infty$.

Exercice 18.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Différentes notions de convergence Le différentes notions de convergence utilisées ici ont été introduites dans le chapitre 5 (voir polycopié).

Exercice 19.
On va étudier l'espace des suites réelles $\ell(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\ell(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension infinie en exhibant une famille infinie libre.

(b) Donner des exemples de suites $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\geq 1}$ telles que:

  (i) $\boldsymbol{x}^{(k)} \to 0$ presque partout mais pas uniformément;

  (ii) $\boldsymbol{x}^{(k)} \to 0$ presque partout mais pas en mesure;

  (iii) $\boldsymbol{x}^{(k)} \to 0$ presque partout mais pas en norme 1.

(d) Montrer que si $\boldsymbol{x}^{(k)} \to 0$ en mesure, alors $\boldsymbol{x}^{(k)} \to 0$ presque partout. Quelle propriété de la mesure a-t-on utilisée ici ?
Indication: procéder par contraposée: montrer que si $\boldsymbol{x}^{(k)}$ ne converge pas presque partout vers 0, alors elle ne converge pas en mesure non-plus.

Attention ! Chaque élément $\boldsymbol{x}^{(k)} \in \ell(\mathbb{R})$ est une suite qu'on peut écrire $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\geq 1}$ est une suite de suites.

Exercice 20.

Fixons un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$.

(a) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $f_n \to f$ uniformément, alors $f_n \to f$ presque partout.

(b) Montrer que, si $f_n \to f$ presque partout et que μ est finie, alors $f_n \to f$ en mesure.
Indication: poser $A_{\epsilon,n} = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\}$. Écrire la condition "$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$" en fonction des ensembles $A_{\epsilon,n}$ en utilisant des intersections. Écrire ensuite la condition "$\exists N \geq 1$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$" en fonction des ensembles $A_{\epsilon,n}$. Enfin, écrire la condition "x est tel que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$" en fonction des ensembles $A_{\epsilon,n}$.

(c) Quand $E = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, donner des exemples où $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en mesure mais pas presque partout et où $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ presque partout mais pas en mesure.